Über
das geometrische Mittel

insbesondere

über eine dadurch bewirkte Annäherung kubischer Irrationalitäten.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

der

hohen Philosophischen Facultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt

WILHELM LOREY

Oberlehrer am Realgymnasium zu Remscheid.

ACAD. LUGD BAT. MBL.

HALLE A. S.

1901.

Dem königlichen Gymnasial-Direktor a. D.

Herrn Geheimen Regierungsrat

ADOLF QUAPP

zu LEER in Ostfriesland

gewidmet

von dem Verfasser

in dankbarer Erinnerung an die Jahre in Ostfriesland.

EINLEITUNG.

Der Erfinder der Logarithmen, Neper, schlägt in einer zur Erläuterung seiner Tafeln dienenden Schrift vier Methoden vor zur Berechnung der Logarithmen. Eine dieser Methoden beruht auf dem fortgesetzten Quadratwurzelziehen. Neper selbst scheint nach dieser Methode nicht gearbeitet zu haben; wohl aber hat sie Kepler benutzt bei seiner im Jahre 1624 erschienenen Tafel »Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos.[1]«

Der Algorithmus jener Methode ist folgender: Wird der Logarithmus einer zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl x gesucht, wo a_1 und a_2 positive reelle Grössen sind mit den schon bekannten Logarithmen b_1 und b_2, so bilde man das geometrische Mittel

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_1}$$

es ist dann

$$\log a_3 = b_3 = \frac{b_2 + b_1}{2}$$

a_3 liegt jedenfalls zwischen a_2 und a_1, wird aber im allgemeinen von x noch verschieden sein. Man bilde daher

$$a_4 = \sqrt{a_3 \cdot a_2}$$

und so weiter. Allgemein lässt sich also dieser Prozess der fortgesetzten Bildung des geometrischen Mittels darstellen durch die Gleichung:

$$a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$$

Es erhebt sich nun die Frage: *Welcher Grenze nähern sich die so definierten* a_x oder in Zeichen:

$$\text{Was ist } \lim_{x=\infty} a_x \text{ ?}$$

Diese Frage ist, soweit dem Verfasser bekannt ist, bisher in der Litteratur noch nicht behandelt. Den ersten Berechnern der Logarithmen lag sie offenbar fern; allerdings gebrauchten sie die fortgesetzte Mittelbildung nicht in der oben definierten Gesetzmässigkeit. Da sie sich die Aufgabe stellten, den Logarithmus einer ganz bestimmten zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl x zu bestimmen, so suchten sie durch verschiedenartige Combinationen der einzelnen Mittel der Zahl x so nahe als möglich zu kommen. Ein Beispiel kann diese Abweichung erläutern. Bis $a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_3}$ sei nach der allgemeinen Vorschrift gerechnet; es sei nun

$$a_5 < a_4 < x < a_3$$

Bildet man jetzt gesetzmässig $a_6 = \sqrt{a_5 a_4}$, so wird offenbar $x - a_6 > x - a_5$; man käme also der gesuchten Zahl nicht näher. Abweichend von der Regel bildet man daher:

$$a'_6 = \sqrt{a_5 \cdot a_3}$$

(Bei Abweichungen sollen gestrichelte Buchstaben benutzt werden).

[1]) Cantor, Geschichte der Mathematik, II., 672 und 677.

Da a'_6 zwischen a_5 und a_3 liegt, so ist sicher

$$|x-a'_6|<|x-a_5|.$$

Ein Zahlenbeispiel bringt Eulers Introductio.[2] Dort ist

$$a_1=1 \quad a_2=10 \quad x=5.$$

Das Mittel wird 22 mal gebildet und liefert schliesslich auf 6 Dezimalen

$$a'_{24}=5{,}000\,000;$$

während $a'_{23}=5{,}000\,003$ und $a'_{22}=4{,}999\,997$ ist. Das angewandte Verfahren lässt sich symbolisch in leicht ersichtlicher Weise so beschreiben:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (4,6) (6,7) (6,8) (8,9) (9,10) (10,11) (10,12) (10,13) (13,14) (14,15) (14,16) (14,17) (14,18) (14,19) (19,20) (20,21) (20,22) (22,23).

Von der allgemeinen Vorschrift (x, x—1) ist also in diesem Beispiel 9 mal abgewichen.

Im Anschluss hieran erhebt sich eine zweite Frage, die wir hier zunächst ohne weitere Erläuterung so aussprechen:

Kann durch den fortgesetzten Prozess des Mittelbildens jede zwischen a_1 *und* a_2 *liegende Grösse als Grenzwert dargestellt werden?*

Die Beantwortung der beiden Fragen ist der Zweck vorliegender Arbeit. Das Problem wird darin aber ausgedehnt auf den allgemeinen Fall des geometrischen Mittels aus n Grössen. Die Behandlung der ersten Frage führt auf Differenzengleichungen, über die daher in einem besonderen Paragraphen das nötige gesagt wird. Benutzt werden dabei die betreffenden Kapitel aus der Differenzenrechnung von Markoff. Die Absicht des Verfassers war es, die nicht gerade flüssige Darstellung bei Markoff in eine bessere Form zu bringen. Das Ergebnis im Falle zweier Grössen, eine kubische Irrationalität, zeigt mit dem sogenannten Delischen Problem eine nahe Verwandtschaft, die klar zu legen ebenfalls ein besonderer Abschnitt bestimmt ist. Vorerst aber soll über ähnliche Prozesse berichtet werden.

[2] Deutsche Ausg. von Michelsen, S. 106.

§ 1.

Das arithmetisch-geometrische und das geometrisch-harmonische Mittel.

Die unendlichen Prozesse der Mittelbildung sind für andere Mittel aus der Litteratur schon bekannt. Hier muss vor allen Dingen das »arithmetisch-geometrische Mittel« genannt werden, das Gauss eingeführt hat. Es ist folgendermaassen definiert: Sind m und n zwei positive Grössen, so werde gesetzt

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n) \quad n' = \sqrt{m \cdot n}$$

dann bilde man weiter

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n') \quad n'' = \sqrt{m' \cdot n'}$$

und so fort. Gauss zeigt, dass die m und die n schnell derselben Grenze μ sich nähern. Nur wenig hat Gauss darüber veröffentlicht. Es erscheint dieses arithmetisch-geometrische Mittel μ in einer Arbeit[3] aus der Störungstheorie vom Jahre 1818. Der Nachlass[4] bestätigt aber, was Gauss in der Selbstanzeige jener Arbeit in den Göttingenschen Gelehrten Anzeigen schreibt: »Da diese Integrale (auf die das Störungsproblem führt. Anm. d. Verf.) transcendenter Natur sind und bekannter Maassen mit anderen in der Perturbationsrechnung vorkommenden vielbehandelten Transcendenten zusammenhängen, so konnte die Auflösung, nachdem sie bis auf diesen Punkt geführt war, als vollendet angesehen werden. Der Verfasser hat dagegen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines neuen Algorithmus zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transcendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird«. Diese Untersuchung ist nicht erschienen, weil bald darauf Abel im Crelleschen Journal seine Arbeiten über elliptische Funktionen veröffentlichte — um diese Funktionen handelt es sich nämlich — Arbeiten, von denen Gauss in einem Briefe schreibt, dass sie von seinen eigenen Untersuchungen wohl $\frac{1}{3}$ vorweggenommen haben. Eine Veröffentlichung dieser hielt er daher für überflüssig, wie er Crelle mitteilte, zumal »Abel grossen Scharfsinn und auch Eleganz in seiner Arbeit zeigte«.

Das arithmetisch-geometrische Mittel wurde von Borchard[5] auf mehr als zwei Grössen ausgedehnt.

Die Untersuchungen von Gauss über das arithmetisch-geometrische Mittel sind auch der Ausgangspunkt der Arbeiten von Schapira[6] über »algebraische Iteration«.

Viel früher tritt das geometrisch-harmonische Mittel auf. Es erscheint bei einem englischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, James Gregory, in einer Schrift: vera

---

[3]) Werke III S. 352. [4]) III 361 f. f.

[5]) Monatsberichte der Berl. Akad. 1876. Bulletin des Sciences Math., II. ser., vol I 1877. Abhandlungen der Berl. Akad. 1878.

[6]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 8 S. 64 (Nekrolog für Schapira).

circuli et hyperbolae quadratura. Dort findet sich der Satz: Werden einem Kreise, einer Ellipse oder einer Hyperbel Vielecke ein- und umbeschrieben, deren Seitenzahl fortwährend wächst, und ist A_1 der Inhalt des ersten Sehnenvielecks, B_1 des ersten Tangentenvielecks, A_n des n ten Sehnenvielecks und B_n der Inhalt des n ten Tangentenvielecks, dann ist:

$$A_n = \frac{2A_{n-1} \cdot B_{n-1}}{A_{n-1} + B_{n-1}} \qquad B_n = \sqrt{A_{n-1} \cdot B_{n-1}}$$ [7) und 8)]

Es bildet sich, wie es in der Vorrede heisst: eine »Series polygonorum convergens, cuius terminatio est circulus«.

Cantor bemerkt an dieser Stelle, dass wir heute die Grenze derartiger unendlicher Processe eine »Transcendente« nennen. Das arithmetisch-geometrische Mittel und das geometrisch-harmonische Mittel liefert allerdings allgemein eine transcendente Grösse. Dagegen definiert, wie die vorliegende Arbeit zeigen wird, das geometrische Mittel allein eine algebraische Irrationalität.

Dem arithmetisch-geometrischen Mittel und dem geometrisch-harmonischen ist gemeinsam die Combination verschiedenartiger Mittel, während in dem in dieser Arbeit behandelten Prozesse nur ein Mittel, das geometrische, zu Grunde gelegt wird. Sehr nahe liegend ist die Frage nach dem entsprechend gebildeten arithmetischen Mittel, dessen Algorithmus also durch die Formel

$$a_x = \frac{a_{x-1} + a_{x-2}}{2}$$

gegeben ist, zumal dieser Prozess des arithmetischen Mittels parallel läuft der Bildung des geometrischen Mittels bei der in der Einleitung erwähnten Logarithmenberechnung.

Das arithmetische Mittel ist nun allgemein schon behandelt in der Differenzenrechnung von Markoff. Man betrachtet heute Rekursionsformeln wie die obige oder wie die allgemeine

$$a_x = \frac{1}{n}(a_{x-1} + a_{x-2} + \cdots a_{x-n})$$

durch die also die Glieder einer wiederkehrenden Reihe im älteren Sprachgebrauch definiert werden, von dem allgemeinen Standpunkt der Differenzengleichungen. Auch in dieser Arbeit soll die Theorie der Differenzengleichungen benutzt werden. Der nächste Abschnitt bringt daher das nötige aus jener Theorie.

§ 2.

Lineare Differenzengleichungen. [9)]

Unter einer Differenzengleichung versteht man allgemein eine Gleichung, die besteht zwischen der unabhängigen Veränderlichen x, einer unbekannten Funktion f(x) und den endlichen Differenzen dieser Funktion. Die endlichen Differenzen sind aber bekanntlich definiert durch:

---

[7]) Cantor, Geschichte der Math., II., 655.

[8]) Der Verfasser wurde durch Herrn Prof. Wangerin darauf aufmerksam gemacht, dass früher auf dem Gymnasium dieser Satz zur Kreisberechnung benutzt wurde. In der That findet er sich auch in älteren guten Büchern wie Baltzer, Heiss, Gallenkamp. Dagegen scheint er in die neueren Bücher nicht übergegangen zu sein.

[9]) Vergl. Markoff, Differenzenrechnung (deutsch von Friesendorff u. Prümm), Cap. XI u. XIII.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Hierbei bedeutet h eine endliche Grösse, die wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich 1 setzen können. Wenn wir dann noch zur Abkürzung für $f(x+\nu)$ schreiben $y_{x+\nu}$, so können wir allgemein eine Differenzengleichung darstellen in der Form:

$$\psi(x_1\, y_x\, y_{x+1} \cdot \cdot \cdot y_{x+n}) = 0.$$

Eine solche Gleichung heisst von ***der n ten Ordnung,*** wenn y_x und y_{x+n} darin wirklich vorkommen.

In der vorliegenden Untersuchung erscheinen hauptsächlich nur homogene, lineare Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten, d. h. Gleichungen folgender Gestalt:

$$a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n y_{x+n} = 0.$$

Die Coefficienten a_0, $a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ sind Constanten, die wir als reell voraussetzen; a_0 und a_n auch natürlich verschieden von Null.

Die Lösung einer derartigen Gleichung verlangt nun die Bestimmung der Funktion $y_x = f(x)$. Bilden wir schrittweise

$$y_{n+1} = \cdot \frac{1}{a_n}(a_{n-1} y_n + \cdot \cdot \cdot a_0 y_1) = \varphi(y_1 \cdot \cdot \cdot y_n)$$

$$y_{n+2} = \varphi(y_2 \cdot \cdot \cdot y_{n+1}) = \varphi_1(y_1 \cdot \cdot \cdot y_n)$$
u. s. w.

so erkennen wir sofort:

Die Differenzengleichung hat unendlich viel Lösungen, die von den n *willkürlichen Anfangswerten* $y_1 \cdot \cdot \cdot y_n$ *abhängen.*

Sind nun $y_x^{(1)}\, y_x^{(2)} \ldots y_x^{(n)}$ n besondere von einander unabhängige Lösungen, so genügt offenbar jede lineare Combination dieser Lösungen mit constanten Coefficienten ebenfalls der Differenzengleichung. Denn setzen wir in diese ein

$$y_x = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda\, y_x^{(\lambda)},$$

unter $c_\lambda \cdot \cdot \cdot$ n willkürliche Constanten verstanden, und fassen die Glieder mit gleichem c_λ zusammen, so erhalten wir auf der linken Seite:

$$c_1 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(1)} + c_2 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(2)} \cdot \cdot \cdot + c_n \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(n)}$$

Nun ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 1,\ 2 \cdot \cdot \cdot n)$$

Also ist in der That

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(\lambda)} = 0.$$

Das heisst aber:

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung lässt sich durch n *partikuläre Lösungen* $y_x^{(\lambda)}$ *und* n *willkürliche Constanten* c_λ *darstellen in der Form:*

$$y_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \cdot \cdot \cdot c_n y_x^{(n)}$$

Um nun partikuläre Lösungen zu erhalten, bilden wir die algebraische Gleichung, die dieselben Coefficienten hat, wie die Differenzengleichung; d. i. die Gleichung

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \cdot \cdot a_n z^n = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit z^x, so folgt

$$a_0 z^x + a_1 z^{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n z^{x+n} = 0.$$

Ein Vergleich mit der Differenzengleichung

$$a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n y_{x+n} = 0$$

zeigt, dass man $y_x = z^x$ setzen kann, wenn z eine Wurzel der »Beziehungsgleichung« ist. Den Ausdruck »Beziehungsgleichung« möchte ich gebrauchen im Anschluss an die Eulersche Bezeichnung »Beziehungsskala einer wiederkehrenden Reihe«. Erscheint doch in der früheren Behandlung der rekurrenten Reihen die ganze rationale Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdot \cdot \cdot a_n z^n$$

als Nenner der rationalen Funktion $F_{(z)} = \frac{1}{f(z)}$, deren Entwickelung nach Potenzen von z die y_x als Coefficienten auftreten lässt. Die Reihenfolge der Coefficienten $a_0\, a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ heisst aber bei Euler Beziehungsskala.

Die Wurzeln, die zunächst alle als von einander verschieden vorausgesetzt werden, seien nun $\zeta_1\ \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$.

Dann ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = c_1 \zeta_1^x + c_2 \zeta_2^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n^x.$$

Der Fall, dass die Beziehungsgleichung mehrfache Wurzeln hat, kommt in den folgenden Anwendungen nicht vor, da von den betreffenden Gleichungen gezeigt wird, dass ihre Wurzeln alle verschieden sind. Es sollen daher hier nur an einem leicht verallgemeinerungsfähigen besonderen Falle aus den Wurzeln der Beziehungsgleichung n von einander unabhängige partikuläre Lösungen abgeleitet werden.

Es sei ζ_1 eine dreifache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$. Dann müssen auch die beiden ersten Ableitungen von $f(z)$ für $z = \zeta_1$ verschwinden; das heisst: es müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} f(\zeta_1) &= a_0 + a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot a_n \zeta_1^n = 0 \\ f'(\zeta_1) &= a_1 + 2 a_2 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot n a_n \zeta_1^{n-1} = 0 \\ f''(\zeta_1) &= 2 a_2 + \cdot \cdot \cdot (n-1) n a_n \zeta_1^{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Um die zweite und dritte dieser Gleichungen in formale Übereinstimmung zu bringen mit der ersten, fügen wir auf der rechten Seite die Glieder

$$\frac{0 \cdot a_0}{\zeta_1} \text{ bez. } \frac{0 \cdot a_0}{\zeta_1^2} + \frac{0 \cdot a_1}{\zeta_1}$$

zu, was erlaubt ist, da wegen der Voraussetzung $a_0 \leqslant 0$ auch $|\zeta_1| \leqslant 0$ ist. Aus dem gleichen Grunde ist es auch gestattet, die zweite Gleichung mit ζ_1, die dritte mit ζ_1^2 zu

multiplizieren. Man erhält dann also:

$$\zeta_1 f'(\zeta_1) = \quad 0 \cdot a_0 + a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot + n a_n \zeta_1^n = 0$$
$$\zeta_1^2 f''(\zeta_1) = 0 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot + n \cdot (n-1) \zeta_1^n = 0$$

Diese Form lässt erkennen, dass ausser ζ_1^x auch $x\zeta_1^x$ und $x \cdot (x-1)\zeta_1^x$ particuläre Lösungen sind. Will man kleinere Coefficienten haben, so empfiehlt es sich, die dritte Gleichung mit $\frac{1}{2!}$ zu multiplizieren. Die dritte partikuläre Lösung wird dann $\binom{x}{2}\zeta_1^x$.

Man erkennt sofort, wie im Falle einer ν fachen Wurzel ζ_1 aus dieser sich die ν particulären Lösungen ergeben:

$$\zeta_1^x, \ \binom{x}{1}\zeta_1^x, \cdot \cdot \cdot \binom{x}{\nu-1}\zeta_1^x$$

Es wäre jetzt noch zu beweisen, dass die Lösungen mit den $n-\nu$ übrigen ein System unabhängiger Lösungen bilden. Aus dem oben angegebenen Grunde übergehen wir hier diesen Beweis. Es sei nur bemerkt, dass die zum Beweise nötige Determinante weiter unten in anderem Zusammenhang behandelt werden wird.

§ 3.
Das arithmetische Mittel.

Ehe wir zum geometrischen Mittel übergehen, soll als erstes Beispiel einer Anwendung der Theorie der Differenzengleichungen das arithmetische Mittel benutzt werden. Dieses ist, wie oben erwähnt, schon von Markoff behandelt.[10] Indem wir die Markoffsche Lösung hier wiedergeben, wird sich Gelegenheit bieten, sie in einigen Punkten zu ergänzen. In dem einfachsten Fall des Mittels aus zwei Grössen lautet die Differenzengleichung in der Normalform:

$$y_x + y_{x+1} - 2y_{x+2} = 0.$$

Die Wurzeln der Beziehungsgleichung sind

$$\zeta_1 = 1, \ \zeta_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung wird daher

$$y_x = c_1 + c_2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

Bestimmt man die Constanten c_1 und c_2 durch die Anfangswerte y_1 und y_2 mittels der Gleichungen

$$y_1 = c_1 - \tfrac{1}{2}c_2$$
$$y_2 = c_1 + \tfrac{1}{4}c_2$$

so erhält man als allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$y_x = \frac{y_1 + 2y_2}{3} + \frac{4(y_2 - y_1)}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

$$\text{Also } \lim_{x=\infty} y_x = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$$

Im Besonderen *liefert also der Process des arithmetischen Mittels aus den Zahlen* 0 *und* 1 *den Grenzwert* $\frac{2}{3}$.

Ohne zunächst näher auf dieses Resultat einzugehen – das wird erst weiter unten geschehen bei dem Vergleich mit dem geometrischen Mittel – wenden wir uns gleich zu dem allgemeinen Fall, dessen Algorithmus also definiert ist durch die Gleichung:

$$y_{x+n} = \tfrac{1}{n}(y_{x+n-1} + y_{x+n-2} + \cdot \cdot \cdot y_x).$$

[10] M. Differenzenrechnung, S. 175.

oder in der Normalform

$$y_x + y_{x+1} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ y_{x+n-1} - n\,y_{x+n} = 0.$$

Hier lautet die Beziehungsgleichung

$$1 + z + z^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + z^{n-1} - n\,z^n = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\zeta_1 = 1$. Sind $\zeta_2, \zeta_3 \cdot\ \cdot\ \cdot \zeta_n$ die übrigen Wurzeln, so ist also die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = c_1 + c_2\,\zeta_2{}^x + \cdot\ \cdot\ \cdot\ c_n\,\zeta_n{}^x.$$

Zu diesem Ansatz ist man aber erst berechtigt, nachdem man sich überzeugt hat, dass die Beziehungsgleichung keine mehrfachen Wurzeln hat. Es ist diese Thatsache bei Markoff gar nicht erwähnt, vielmehr dort ohne weiteres die allgemeine Lösung in der obigen Form angegeben. Wir wollen daher zunächst beweisen, dass die Beziehungsgleichung

$$f(z) = z^n - \tfrac{1}{n} z^{n-1} - \tfrac{1}{n} z^{n-2} \cdot\ \cdot\ \cdot - \tfrac{1}{n} = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln hat.

Es sei ζ eine mehrfache Wurzel, dann müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

(1) $$f(\zeta) = \zeta^n - \frac{1}{n}\zeta^{n-1} - \frac{1}{n}\zeta^{n-2} \cdot\ \cdot\ \cdot - \frac{1}{n} = 0$$

(2) $$f'(\zeta) = \quad n\,\zeta^{n-1} - \frac{n-1}{n}\zeta^{n-2} \cdot\ \cdot\ \cdot - \frac{1}{n} = 0$$

Die Subtraktion von (1) und (2) liefert:

(3) $$\zeta^n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\zeta^{n-1} + \frac{n-2}{n}\zeta^{n-2} + \frac{n-3}{n}\zeta^{n-3} \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{1}{n}\zeta = 0$$

Da ζ von Null verschieden ist, so ergiebt sich:

(4) $$\zeta^{n-1} - \left(n + \frac{1}{n}\right)\zeta^{n-2} + \frac{n-2}{n}\zeta^{n-3} + \frac{n-3}{n}\zeta^{n-4} \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{1}{n} = 0.$$

Schliesslich erhält man durch Addition von (2) und (4)

(5) $$(n+1) \cdot [\zeta^{n-1} - \zeta^{n-2}] = 0$$

(6) $$\text{oder } (n+1) \cdot \zeta^{n-2} \cdot (\zeta - 1) = 0$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich also, dass nur $\zeta = 1$ eine mehrfache Wurzel von (1) sein könnte. Da aber dieser Wert der Gleichung (2) nicht genügt, so ist damit die Einfachheit der Wurzeln bewiesen.

Man kann nun aber weiter zeigen, dass die Wurzeln $\zeta_2, \zeta_3 \cdot\ \cdot\ \cdot \zeta_n$ alle innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt liegen. Da bei Markoff es nur heisst, dass »man sich leicht davon überzeugt«, so soll ein Beweis hier gegeben werden.

Es sei $|z| > 1$, dann ist[11]

(1) $$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{nz} + \frac{1}{nz^2} + \cdot\ \cdot\ \cdot \frac{1}{nz^{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdot\ \cdot\ \cdot \frac{1}{n} = 1\right|$$

Nach dem bekannten Satze, dass der Modul der Summe absoluter Grössen nicht grösser ist als die Summe der Moduln, muss nämlich die Ungleichung bestehen:

$$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{nz} + \frac{1}{nz^2} + \cdot\ \cdot\ \cdot \frac{1}{nz^{n-1}}\right| \leqq \left|\frac{1}{nz}\right| + \left|\frac{1}{nz}\right| \cdot\ \cdot\ \cdot + \left|\frac{1}{nz^{n-1}}\right|$$

[11]) Vergl. Weber Algebra I, erste Aufl., S. 318.

Da nun aber offenbar wegen $|z|>1$

$$\left|\frac{1}{n z^{\lambda}}\right|<\frac{1}{n},$$

so folgt sofort die Richtigkeit der obigen Ungleichung (1).

Wir bilden uns jetzt die Funktion

$$\varphi(z)=z^{1-n} f(z)=z-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n z}\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n z^{n-1}}\right)$$

Für $|z|>1$ kann, wie man sofort sieht, $\varphi(z)$ nicht verschwinden, denn nach der Ungleichung (1) ist dann der absolute Wert der Klammer auf der linken Seite kleiner als der absolute Wert von z. Folglich kann auch $f(z)$ für $|z|>1$ nicht verschwinden; das heisst: *die* n *Wurzeln* $\zeta_1\cdot\cdot\cdot\zeta_n$ *sind dem absoluten Werte nach nicht grösser als* 1.

ζ_1 hat nun den Wert 1. Dieser Wert kann unter den übrigen Wurzeln nicht mehr vorkommen, da die Gleichung ja keine mehrfachen Wurzeln hat. Dagegen ist es denkbar, dass eine der Wurzeln den absoluten Wert 1 hat. Es sei z. B.

$$|\zeta_{\lambda}|=1$$

Wir geben ζ_{λ} die Form $\zeta_{\lambda}=\cos\delta+i\sin\delta.$

Setzt man diesen Wert in die Beziehungsgleichung

$$f(z)=n z^{n}-z^{n-1}\cdot\cdot\cdot-1=0$$

ein, so erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären folgende zwei Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$n\cos n\delta-\cos(n-1)\delta-\cdot\cdot\cdot-\cos\delta=1$$

$$n\sin n\delta-\sin(n-1)\delta-\cdot\cdot\cdot-\sin\delta=0$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert sie, so ergiebt sich mit Rücksicht auf das Additionstheorem und auf die Beziehung

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$$

$$n^2+n-2=2n\sum_{\nu=n-1}^{1}\cos\nu\delta-2\sum_{\nu=n-2}^{1}\cos\nu\delta\cdot\cdot\cdot-2\cos\delta$$

oder:

$$n^2+n-2=2[n\cos(n-1)\delta+(n-1)\cos(n-2)\delta+\cdot\cdot\cdot 2\cos\delta].$$

Der auf der rechten Seite stehende Klammerausdruck erscheint nun genau so in dem reellen Bestandteil der Gleichung, der die Wurzeln $\zeta_2\cdot\cdot\cdot\zeta_n$ genügen, das heisst der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z-1}=n z^{n-1}+(n-1)z^{n-2}+\cdot\cdot\cdot 1=0.$$

Setzt man hier $\zeta_{\lambda}=\cos\delta+i\sin\delta$ ein, so folgt

$$n\cos(n-1)\delta+(n-1)\cos(n-2)\delta\cdot\cdot\cdot+2\cos\delta=-1.$$

Daraus ergiebt sich aber $n^2+n=0$

was unmöglich ist.

Also kann keine andere Wurzel den absoluten Wert 1 haben.

Oder die beiden Resultate vereinigt:

Die übrigen Wurzeln der Beziehungsgleichung liegen innerhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt.

In der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = c_1 + c_2 \zeta_2{}^x + c_3 \zeta_3{}^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^x$$

verschwinden nun wegen $|\zeta| < 1$ mit wachsendem x alle Glieder bis auf das erste, und es bleibt also

$$\lim_{x=\infty} y_x = c_1$$

Es ist daher noch die Constante c_1 als Funktion der Anfangswerte zu bestimmen. Dazu dient das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2 \zeta_2 + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n \\ y_2 &= c_1 + c_2 \zeta_2{}^2 + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^2 \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ y_n &= c_1 + c_2 \zeta_2{}^n + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^n \end{aligned}$$

Zur Auflösung dieses Systems nach c_1 scheint zunächst die Kenntnis der übrigen Wurzeln nötig zu sein. Wir können aber hier, wie weiter unten bei dem geometrischen Mittel diese Constante auch ohne Kenntnis der anderen Wurzeln bestimmen. Hier ergiebt sich die Bestimmung wesentlich einfacher, als bei Markoff, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit 1, 2, · · · n multipliziert und addiert.[12] Man erhält dann sofort

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \lambda y_\lambda = \frac{n(n+1)}{2} c_1$$

Die übrigen Glieder rechts fallen alle fort; es ist nämlich

$$c_n \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \zeta_n{}^\lambda = c_n \zeta_n \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \zeta_n{}^{\lambda-1} = 0$$

wegen der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z - \zeta_1} = n z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \cdot \cdot \cdot 1 = 0,$$

der die Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ genügen.

Es sei noch bemerkt, dass weiter unten beim geometrischen Mittel die entsprechende Constantenbestimmung auf einem anderen, auch von dem Markoffschen verschiedenen Wege geschieht.

So erhält man endlich:

$$\lim_{x=\infty} y_x = \frac{2 \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda y_\lambda}{n(n+1)}.$$

Man erkennt sofort in dieser allgemeinen Lösung die oben besonders berechnete für zwei Grössen, für die sich ergiebt:

$$\lim_{x=\infty} y_x = \frac{y_1 + 2 y_2}{3}.$$

[12] Auf diese Vereinfachung wurde der Verfasser nachträglich durch Herrn Professor Wangerin hingewiesen.

§ 4.

Das geometrische Mittel.

Wir wenden uns nun zu unserer eigentlichen Aufgabe: der Untersuchung des geometrischen Mittels und zwar zunächst für den Fall zweier Grössen.

Es seien also a_1 und a_2 zwei positive reelle Zahlen. Wir bilden dann das geometrische Mittel

$$a_3 = \sqrt{a_1 \cdot a_2};$$

$$\text{und weiter } a_4 = \sqrt{a_2 \cdot a_3};$$

$$\text{allgemein } a_x = \sqrt{a_{x-2} \cdot a_{x-1}}$$

Die Wurzel ist natürlich eindeutig als der positive Wert zu verstehen.

Zur Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x=\infty} a_x$ werde a_x als Funktion der gegebenen Grösse a_1 und a_2 dargestellt. Benutzt man gebrochene Exponenten, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1^{\frac{1}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \\
a_4 &= a_2^{\frac{1}{2}} a_3^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{1}{4}} a_2^{\frac{3}{4}} \\
a_5 &= a_3^{\frac{1}{2}} a_4^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{3}{8}} a_2^{\frac{5}{8}} \\
a_6 &= a_4^{\frac{1}{2}} a_5^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{5}{16}} a_2^{\frac{11}{16}} \\
&\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
&\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
&\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot
\end{aligned}$$

Allgemein setzen wir

$$a_x = a_1^{\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}} a_2^{\frac{y_x^{(2)}}{2^{x-2}}}$$

Die $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ genügen dann der Differenzengleichung

$$2y_x \quad y_{x+1} - y_{x+2} = 0.$$

Man überzeugt sich davon sofort durch den Schluss von x auf x + 1. Denn bildet man

$$a_{x+1} = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_x}$$

so erscheint das Produkt

$$\left(a_1^{\frac{y_{x-1}^{(1)}}{2^{x-3}}} \cdot a_1^{\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}} \right)^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{2y_{x-1}^{(1)} + y_x^{(1)}}{2^{x-1}}}$$

und natürlich ganz entsprechend für a_2.

Die Beziehungsgleichung lautet

$$2 + z - z^2 = 0.$$

Die Wurzeln sind $\zeta_1 = 2$, $\zeta_2 = -1$.

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung wird daher

$$y_x = c_1 2^x \quad c_2 (-1)^x.$$

Um die für die particulären Lösungen $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ charakteristischen Constanten zu unterscheiden, bezeichnen wir sie noch mit dem entsprechenden oberen Index (1) oder (2).

Zur Bestimmung dieser Constanten gebrauchen wir die Gleichungen:

$$\begin{matrix} y_1^{(\lambda)} = c_1^{(\lambda)} 2 & c_2^{(\lambda)} \\ y_2^{(\lambda)} \quad c_1^{(\lambda)} 4 & c_2^{(\lambda)}. \end{matrix} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

Die »Anfangswerte« $y_1^{(\lambda)}$ und $y_2^{(\lambda)}$ aber lassen sich aus den bekannten Werten $y_3^{(\lambda)}$ und $y_4^{(\lambda)}$ mittels der Differenzengleichung berechnen.

Es ist $y_3^{(1)}=1 \quad y_4^{(1)}=1 \quad y_3^{(2)}=1 \quad y_4^{(2)}=3.$

Daher hat man die zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} &= 1 \quad y_2^{(1)} + 2\,y_1^{(1)} \\ y_4^{(1)} &= 1 + y_3^{(1)} + 2\,y_2^{(1)} \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} y_3^{(2)} &= 1 = y_2^{(2)} + 2\,y_1^{(2)} \\ y_4^{(2)} &= 3 = y_3^{(2)} + 2\,y_2^{(2)} \end{aligned}$$

Das erste liefert $y_2^{(1)}=0 \qquad y_1^{(1)}=\frac{1}{2}$,

das zweite $y_2^{(2)}=1 \qquad y_1^{(2)}=0.$

Aus diesen Werten erhält man schliesslich

$$c_1^{(1)}=\frac{1}{12} \qquad c_2^{(1)}=-\frac{1}{3}$$

$$c_1^{(2)}=\frac{1}{6} \qquad c_2^{(2)}=+\frac{1}{3}$$

Der Exponent von a_1 wird daher

$$\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^x}{2^{x-2}};$$

und der Exponent von a_2:

$$\frac{y_x^{(2)}}{2^{x-2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^x}{2^{x-2}}$$

Mit wachsendem x nähern sich also diese Exponenten von beiden Seiten dem Werte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Es wird demnach

$$\lim_{x=\infty} a_x = \sqrt[3]{a_1\,a_2^2}.$$

Durch diesen Prozess des geometrischen Mittels wird eine kubische Irrationalität angenähert durch eine Kette quadratischer Irrationalitäten.

§ 5.

Das Delische Problem.

Diese Annäherung kubischer Irrationalitäten durch quadratische können wir wiederfinden bei einem berühmten Problem des Altertums, dem sogenannten Delischen Problem der Verdoppelung des Würfels. Allgemein lässt sich der Inhalt dieses Problems durch die Gleichung darstellen

$$z^3 = n\,a^3.$$

Die entsprechende planimetrische Aufgabe

$$z^2 = n\,a^2$$

kann bekanntlich gelöst werden durch die Construction der mittleren Proportionalen

$$a : z = z : n\,a.$$

Diese Methode wurde im Altertum schon verallgemeinert, indem man folgendermaassen *zwei* mittlere Proportionalen z und w einführte:

$$a : z = z : w = w : n\,a.$$

In der That wird dann $z^3=n\,a^3$ und $w^3=n^2a^3$, wie sich aus den Produktengleichungen $z^2 = a\,w$ und $w^2 = n\,a\,z$ leicht ergiebt. Diese Gleichungen stellen in der

modernen Schreibweise in einem rechtwinkligen Coordinatensystem Parabeln dar, deren Schnitt die »Lösung« des Delischen Problems giebt. Man darf nun aber, wie Zeuthen [13] sehr einleuchtend auseinandergesetzt hat, nicht meinen, die Griechen hätten wirklich punktweise die Parabeln construiert. Diese Construktion der Kubikwurzel mittels Kegelschnitten ist vielmehr aufzufassen als ein Beweis für die Existenz der gesuchten Irrationalität. Indem Menächmus zeigte, dass gewissen Schnitten des Kreiskegels die Eigenschaften zukommen, die durch die Proportion

$$a : z = z : w = w : n a$$

verlangt werden, führte er damit die Lösung des Delischen Problems auf Curven zurück, deren Stetigkeit eine Folge war der postulierten Stetigkeit des Kreises. Er konnte dann ohne neue Stetigkeitspostulate die Existenz des Schnittes folgern und damit den Beweis für die Existenz der Kubikwurzel.

Wir benutzen nun hier in keiner Weise Kegelschnitte, sondern konstruieren nur die mittlere Proportionale.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir offenbar $a = 1$ setzen und haben daher die beiden Proportionen

$$1 : z = z : w \tag{1}$$

$$z : w = w : n \tag{2}$$

Aus diesen bilden wir uns zwei Ketten von Näherungswerten für z und nebenbei auch für w, indem wir von zwei ersten Annäherungen für z und w ausgehen.

Werden die beiden Ketten durch die oberen Indices (1) und (2) unterschieden, so können wir in erster Annäherung setzen

$$z_1^{(1)} = 1 \qquad w_1^{(2)} = n.$$

Mit diesem Werte $z_1^{(1)}$ ergiebt sich aus Gleichung

$$n_2^{(1)} = n^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

»Verbessert« man dann z durch Einsetzen des Wertes $w_2^{(1)}$ in die Gleichung (1), so ergiebt sich

$$z_2^{(1)} = n^{\frac{1}{2}}.$$

So fortfahrend erhält man also die Kette

$$z_1^{(1)} = 1 \qquad w_1^{(1)} = n^{\frac{1}{2}}$$

$$z_2^{(1)} = n^{\frac{1}{4}} \qquad w_2^{(1)} = n^{\frac{5}{8}}$$

$$z_4^{(1)} = n^{\frac{5}{16}} \qquad w_3^{(1)} = n^{\frac{21}{32}}$$

$$z_4^{(1)} = n^{\frac{21}{64}} \qquad w_4^{(1)} = n^{\frac{85}{128}}$$

und allgemein

$$z_x^{(1)} = n^{\frac{\alpha_x}{2^{2x-2}}} \qquad w_x^{(1)} = n^{\frac{\beta_x}{2^{2x-1}}}$$

Hierbei genügen die Zähler der Exponenten den linearen Differenzengleichungen erster Ordnung

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x + 2^{2x-2} \tag{α}$$

$$\beta_{x+1} = \beta_x + 2^{2x} \tag{β}$$

[13] Die Construction als »Existenzbeweis« bei den Alten. Math. Annalen, B. 47, S. 222.

Bildet man aus dem Annäherungswert

$$w_1^{(2)} = n$$

mittels Gleichung (1)

$$z_1^{(2)} = n^{\frac{1}{2}},$$

dann weiter damit aus Gleichung (2)

$$w_1^{(2)} = n^{\frac{3}{4}}$$

und fährt wie oben fort, so erhält man die Kette:

$$\begin{array}{ll} w_1^{(2)} = n & z_1^{(2)} = n^{\frac{1}{2}} \\ w_2^{(2)} = n^{\frac{3}{4}} & z_2^{(2)} = n^{\frac{3}{8}} \\ w_3^{(2)} = n^{\frac{11}{16}} & z_3^{(2)} = n^{\frac{11}{32}} \\ w_4^{(2)} = n^{\frac{43}{64}} & z_4^{(2)} = n^{\frac{43}{128}} \end{array}$$

allgemein

$$w_x^{(2)} = n^{\frac{\gamma_x}{2^{2x-2}}} \qquad z_x^{(2)} = n^{\frac{\delta_x}{2^{2x-1}}}$$

Die Zähler genügen in diesem Falle der Gleichung

$$(\gamma) \qquad \gamma_{x+1} = \gamma_x + 2^{2x-1}$$

und genau so für δ_x.

Die Bestimmung des Grenzwertes von $z_x^{(1)}$ und $z_x^{(2)}$ erfordert nun die Auflösung dieser Differenzengleichung. Allgemein lässt sich die Lösung jeder linearen Differenzengleichung erster Ordnung[14] (also auch mit nicht constanten Coefficienten) auf eine Summation zurückführen, die hier besonders einfach sich gestaltet.

Wir fassen die 3 Differenzengleichungen (α) (β) und (γ) in der Form zusammen:

$$y_{x+1} = y_x + k_\nu \cdot 2^{2x-2} \qquad (\nu = \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

Es ist $k_\alpha = 1 \quad k_\beta = 4 \quad k_\gamma = 2.$

Bildet man nun:

$$\sum_{x=1}^{x} y_{x+1} = \sum_{x=1}^{x} y_x + k_\nu \sum_{x=1}^{x} 2^{2x-2}$$

so fallen die entsprechenden Glieder auf der linken und rechten Seite weg, und man erhält nach Ausführung der Summation:

$$y_{x+1} - y_1 = k_\nu \frac{2^{2x-1}}{3}.$$

Setzt man jetzt noch für y_1 die Anfangswerte $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1$, so ergiebt sich

$$\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_x}{2^{2x-1}} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2x-2}} \\ \dfrac{\beta_x}{2^{2x-1}} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2x-1}} \\ \dfrac{\gamma_x}{2^{2x-2}} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2x-2}} \\ \dfrac{\delta_x}{2^{2x-1}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2x-1}} \end{array}$$

[14] Vergl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 157.

Daraus sieht man aber, dass

$$\lim_{x=\infty} z_x^{(1)} = \lim_{x=\infty} z_x^{(2)} = \sqrt[3]{n}$$

$$\text{und } \lim_{x\ \infty} w_{(x)}^{(1)} = \lim_{x\ \infty} w_x^{(2)} = \sqrt[3]{n^2}$$

Dieselben Grenzwerte erhält man aber auch aus dem im vorigen Paragraphen behandelten Algorithmus

$$a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}.$$

Setzt man nämlich $a_1 = n \quad a_2 = 1$, so wird

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim_{x=\infty} z_x = \sqrt[3]{n};$$

dagegen folgt aus $a_1 = 1 \quad a_2 = n$

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim_{x=\infty} w_x = \sqrt[3]{n^2};$$

Des weiteren aber zeigt eine Vergleichung der Exponenten, dass die $z_x^{(1)}$ und $w_x^{(1)}$ identisch werden mit den a_x, die von links sich dem Grenzwert nähern, während die $z_x^{(2)}$ und $w_x^{(2)}$ den von oben sich nähernden a_x entsprechen. Das heisst: Es ist

$$\left.\begin{aligned} a_{2x} &= z_x^{(1)} \\ a_{2x+1} &= z_x^{(2)} \end{aligned}\right\} a_1 = n \quad a_2 = 1$$

$$\text{und} \quad \left.\begin{aligned} a_{2x} &= w_x^{(1)} \\ a_{2x+1} &= w_x^{(2)} \end{aligned}\right\} a_1 = 1 \quad a_2 = n$$

Die Darstellung der Exponenten als Summe und Differenz lässt sofort den Grad der Annäherung an den Wert $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ erkennen. Für die praktische Anwendung ist aber von grösserem Interesse, die Annäherung der a_x selbst an den Wert $\sqrt[3]{n}$ nach ihrem Grade kennen zu lernen.

Wir wollen hier für das besondere Beispiel $n = 2$ die Abweichungen von dem wahren Werte $\sqrt[3]{2}$ betrachten. Nun muss man bei einem rekurrenten Verfahren — sei es Zeichnung oder Rechnung — Fehler verschiedener Art unterscheiden. Das ist der »natürliche« Fehler, der bedingt ist durch die Zeichnungs- oder Rechenvorschrift; dann aber kommt ein »persönlicher« Fehler hinzu, der von der Person des Ausführenden abhängt. Diesen letzten Fehler könnte man noch in zwei Unterarten zerlegen:

1. Ein Fehler, der eine Folge ist der von Anfang innerhalb gewisser Grenzen willkürlich festzusetzenden Genauigkeit, mit der gearbeitet werden soll.
2. Vermeidbare Fehler, d. h. Fehler im gewöhnlichen Sinne beim Zeichnen oder Rechnen.

Wir untersuchen hier nur die natürlichen Fehler, die mit F_x bezeichnet werden sollen. Es ist dann

$$F_3 = \sqrt[3]{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8}$$

$$F_4 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{3}{32}$$

$$F_5 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[8]{2^3} = \frac{1}{3} - \frac{3}{8} - \frac{1}{9} + \frac{15}{128}$$

$$F_6 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[16]{2^5} = \frac{1}{3} - \frac{5}{16} - \frac{1}{9} + \frac{55}{512}$$

$$F_7 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[32]{2^{11}} = \frac{1}{3} - \frac{11}{32} - \frac{1}{9} + \frac{231}{2048}$$

$$F_8 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[64]{2^{21}} = \frac{1}{3} - \frac{21}{64} - \frac{1}{9} + \frac{903}{8192}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Diese Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze lässt deutlicher das Abnehmen der Fehler F_x hervortreten. Natürlich sind diese abwechselnd positiv und negativ, und zwar ist

$$F_{2x} > 0$$
$$F_{2x+1} < 0$$

Bis auf 3 Stellen wird

$$F_9 = -0{,}002$$
$$F_{10} = +0{,}001$$

Das heisst aber: Durch achtmalige Construction der mittleren Proportionalen lässt sich $\sqrt[3]{2}$ bis auf $\frac{1}{1000}$ der Längeneinheit darstellen.

§ 6.

Der allgemeine Fall.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung des geometrischen Mittels aus n positiven reellen Grössen $a_1, a_2 \cdot \cdot \cdot a_n$. Mit diesen bilden wir

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \cdot \cdot a_1}$$

und allgemein

$$a_x = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n}}$$

Indem wieder wie bei zwei Grössen gebrochene Exponenten eingeführt werden, schreiben wir

$$a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{y_x^{(\lambda)}}{n^{n-x}}}$$

Die Zähler $y_x^{(\lambda)}$ der Exponenten genügen der linearen Differenzengleichung:

$$y_{x+n} = y_{x+n-1} + n\, y_{x+n-2} + \cdot \cdot \cdot + n^{n-1} y_x$$

Der Beweis ist einfach; denn bildet man a_{x+1}, so wird a_λ geliefert durch die n vorhergehenden Grössen a_x, $a_{x-1} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1}$ mit Exponenten, deren Nenner eine geometrische Reihe bilden. Die Zusammenfassung unter einen Bruchstrich verlangt also eine Erweiterung mit den aufeinander folgenden Potenzen von n.

Die Beziehungsgleichung lautet

$$f(z) = z^n - z^{n-1} - n z^{a-2} \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung hat immer eine ganze rationale Wurzel $\zeta_1 = n$.

Von den übrigen Wurzeln ζ_2, ζ_3, ζ_n lässt sich ähnlich wie beim arithmetischen Mittel zeigen, dass sie alle verschieden von einander und von ζ_1 sind.

Sei ζ eine mehrfache Wurzel, dann müssen die Gleichungen bestehen:

$$f(\zeta) = \zeta^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} n^\nu \zeta^{n-\nu-1} = 0 \tag{1}$$

$$f'(\zeta) = n\zeta^{n-1} - \sum_{\nu=0}^{n-2} n^\nu (n-\nu-1) \zeta^{n-\nu-2} \tag{2}$$

Multipliziert man Gleichung (2) mit n und subtrahiert sie dann von der ersten, so folgt

$$\zeta^n - (n^2+1)\zeta^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n-1} (n^\nu - \nu n) \zeta^{n-\nu} = 0 \tag{3}$$

Da $\zeta \leqslant 0$, so ergiebt sich

$$\zeta^{n-1} - (n^2+1)\zeta^{n-2} + \sum_{\nu=2}^{n-1} (n^\nu - \nu n) \zeta^{n-\nu-1} = 0 \tag{4}$$

Addiert man Gleichung (4) zu der mit n multiplizierten Gleichung (2), so erhält man

$$(n \quad 1)\zeta^{n-1} - n(n \quad 1)\zeta^{n-2} \quad 0.$$

Daraus würde folgen

$$\zeta = n$$

Nun genügt aber $\zeta_1 = n$ nicht der Gleichung (2); also hat die Bestimmungsgleichung keine mehrfachen Wurzeln. Wir können daher die allgemeine Lösung der Differenzengleichung darstellen in der Form

$$y_x = c_1 n^x + c_2 \zeta_2^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n^x.$$

Die zu a_x gehörigen Exponenten erhält man durch Division von y_x mit n^{x-n}. Damit nun bei wachsendem x die Glieder mit ζ_λ verschwinden, ist notwendig und hinreichend, dass

$$|\zeta_\lambda| < n \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n)$$

Dass aber diese Ungleichung erfüllt ist, sieht man sofort, wenn man die Gleichung

$$f(z) - z^n - z^{n-1} - n z^{n-2} \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0$$

mit n^n dividiert. Setzt man nämlich $\frac{z}{n} = v$, so erhält man die Beziehungsgleichung des arithmetischen Mittels, d. h. die Gleichung

$$v^n - \frac{1}{n} v^{n-1} - \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{n} = 0.$$

Nun ist $v_1 = 1$, während, wie oben gezeigt, $|v_\lambda| < 1 \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n)$

Demnach ist

$$|\zeta_\lambda| < n \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n).$$

Es wird also

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_x}{n^{x-n}} \quad c_1 n^n.$$

Die Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung der Constanten c_1. Den n Grössen $y_x^{(\lambda)}$ entsprechend unterscheiden wir die Constanten c_1 für die einzelnen Fälle durch den oberen Index (λ). Zu ihrer Bestimmung benutzen wir das System der Gleichungen $(\lambda = 1, \cdots n)$

$$\begin{aligned}
y_1^{(\lambda)} &= c_1^{(\lambda)} n + c_2^{(\lambda)} \zeta_2 + \cdots c_n^{(\lambda)} \zeta_n \\
y_2^{(\lambda)} &= c_1^{(\lambda)} n^2 + c_2^{(\lambda)} \zeta_2 + \cdots c_n^{(\lambda)} \zeta_2^n \\
&\cdots \\
y_n^{(\lambda)} &= c_1^{(\lambda)} n^n + c_2^{(\lambda)} \zeta_2^n + \cdots c_n^{(\lambda)} \zeta_n^n
\end{aligned}$$

Die Anfangswerte $y_1^{(\lambda)}\ y_2^{(\lambda)}\ y_n^{(\lambda)}$ ergeben sich wieder aus den n Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(\lambda)} &= y_n^{(\lambda)} + n\, y_{n-1}^{(\lambda)} + \cdots n^{n-1} y_1^{(\lambda)} \\
y_{n+2}^{(\lambda)} &= y_{n+1}^{(\lambda)} + n\, y_n^{(\lambda)} + \cdots n^{n-1} y_2^{(\lambda)} \\
&\cdots \\
y_{n+n}^{(\lambda)} &= y_{n+n-1}^{(\lambda)} + n\, y_{n+n-2}^{(\lambda)} + \cdots n^{n-1} y_n^{(\lambda)},
\end{aligned}$$

wenn man die n Werte $y_{n+1}^{(\lambda)} \cdots y_{n+n}^{(\lambda)}$ für jedes λ kennt.

Die Berechnung dieser n Grössen $y_{n+1} \cdots y_{n+n}$ für den Fall $\lambda = 1$ ersieht man aus folgender Tabelle:

Es erscheint a_1:

in	geliefert von	mit dem Exponenten	
a_{n+1}	a_1	$\frac{1}{n}$	
a_{n+2}	a_{n+1}	$\frac{1}{n^2}$	
a_{n+3}	$a_{n+2}\ a_{n+1}$	$\frac{1+n}{n^3}$	$1 < \nu \leqq n$
a_{n+4}	$a_{n+3}\ a_{n+2}\ a_{n+1}$	$\frac{(1+n)^2}{n^4}$	
⋮	⋮	⋮	
$a_{n+\nu}$	$a_{n+\nu-1} \cdots a_{n+1}$	$\frac{(1+n)^{\nu-2}}{n^\nu}$	

Durch Einsetzen dieser Werte kann man rückwärts $y_n^{(1)}\ y_{n-1}^{(1)} \cdots y_1^{(1)}$ berechnen und findet

$$y_n^{(1)} = y_{n-1}^{(1)} = \cdots y_2^{(1)} = 0$$

$$y_1^{(1)} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

Noch einfacher kommt man zu diesen Grössen, wenn man von der allgemeinen Formel ausgeht

$$a_x = \prod a_\lambda^{\frac{y_x^{(\lambda)}}{n^{x-n}}}$$

und diese Darstellung der a_x auch als gültig betrachtet für $x < n+1$.

Dann ergiebt sich sofort

$$\begin{aligned}
y_\nu^{(\lambda)} &= 0 \\
y_\lambda^{(\lambda)} &= \frac{1}{n^{n-\lambda}}
\end{aligned} \qquad \nu \leqq \lambda \begin{cases} \lambda = 1, \cdots n \\ \nu = 1, \cdots n \end{cases}$$

Aus dem obigen Gleichungssystem erhält man nun zunächst

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{\Delta(y_k^{(\lambda)}\, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{n\, \Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Hierbei bedeutet $\Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot \cdot \cdot & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot \cdot \cdot & \zeta_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \cdot \cdot \cdot & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

während $\Delta(y_k^{(\lambda)}\, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die Determinante darstellt, die aus der Determinante des Nenners entsteht, wenn ζ_1^{k-1} ersetzt wird durch $y_k^{(\lambda)}$. Der Faktor n im Nenner erklärt sich dadurch, dass bei den beiden Determinanten die gemeinsamen Faktoren $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ bezw. $\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ herausgezogen sind und dann gekürzt wurde. Für den im Nenner übrig bleibenden Faktor ζ_1 wurde sein Wert n gesetzt, während in der Determinante der besseren Übersicht wegen ζ_1 beibehalten wird.

Entwickelt man nun die Zählerdeterminante nach den Elementen der ersten Kolonne und bezeichnet die entsprechenden Adjunkten mit δ_k so wird also

$$\Delta(y_k^{(\lambda)}\, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k\, y_k^{(\lambda)}$$

Setzt man diese Entwickelung ein und berücksichtigt die oben berechneten Anfangswerte, so folgt:

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{\delta_\lambda}{n^{n+1-\lambda}\, \Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Die Grössen δ_λ und die Determinante $\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ können wir nun berechnen ohne Kenntnis der Wurzeln $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$. Wir brauchen nur die symmetrischen Grundfunktionen dieser Wurzeln; diese ergeben sich aber aus der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z-n} = 0.$$

Es treten nämlich dieselben Adjunkten δ_k auch auf bei der Entwickelung der Determinante des Nenners nach Potenzen von ζ_1; d. h.

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \sum_{k\ 1}^{n} \delta_k\, \zeta_1^{k-1}$$

Für diese Determinante kann man nun aber noch eine andere Entwickelung finden, wenn man sich des Zusammenhangs dieser Determinante mit der Discriminante der Gleichung $f(z) = 0$ erinnert, wonach die Determinante identisch wird ihrem absoluten Werte nach mit der Quadratwurzel aus der Discriminante.[15]

Es besteht nämlich die Beziehung

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \prod_{\nu=1}^{\mu-1} \prod_{\mu=2}^{n} (\zeta_\mu - \zeta_\nu)$$

[15]) Vergl. etwa Weber Algebra I (erste Aufl.) S. 151.

Bedeutet nun $\Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die entsprechend gebildete Determinante $(n-1)$ten Grades, so gilt offenbar die Gleichung:[16]

$$\Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \frac{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{\prod_{\mu=2}^{n}(\zeta_\mu - \zeta_1)}$$

Das Produkt im Nenner lässt sich aber durch die Ableitung der Funktion $f(z)$ ausdrücken. Aus

$$f(z) = \prod_{\mu=1}^{n}(z - \zeta_\mu)$$

folgt nämlich

$$f'(\zeta_1) = \prod_{\mu=2}^{n}(\zeta_1 - \zeta_\mu)$$

Daraus ergiebt sich die neue Darstellung für $\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$:

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = (-1)^{n-1} f'(\zeta_1)\, \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n).$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von ζ_1, so treten dabei, wie die Produktendarstellung von $f'(\zeta_1)$ zeigt, die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ auf. Bezeichnen wir diese unter Berücksichtigung des Vorzeichens allgemein mit C_k, sodass also

$$C_1 = -\sum \zeta_2, \quad C_2 = \sum \zeta_2 \zeta_3, \quad C_3 = -\sum \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4, \cdot \cdot \cdot, \quad C_{n-1} = (-1)^{n-1} \zeta_2 \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$$

ist, dann ergiebt sich die Identität:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \zeta_1^{k-1} \cdot (-1)^{n-1} \Delta(\zeta \cdot \cdot \cdot \zeta_n) \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \zeta_1^{n-k}$$

(Es wird natürlich $C_0 = 1$ gesetzt).

Durch Coefficientenvergleichung folgt daraus

$$\delta_k = (-1)^{n-1} \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)\ C_{n-k}$$

Für den besonderen Wert $k=\lambda$ erhalten wir dann den Quotienten

$$\frac{\delta_\lambda}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)} = \frac{(-1)^{n-1} C_{n-\lambda}\, \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Setzen wir rechts noch den oben berechneten Ausdruck

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = (-1)^{n-1} f'(\zeta_1)\, \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$$

ein, so ergiebt sich schliesslich

$$\frac{\delta_\lambda}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)} = \frac{C_{n-\lambda}}{f'(\zeta_1)}$$

und daher

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{C_{n-\lambda}}{n^{n+1-\lambda} f'(\zeta_1)}$$

Um nun die Constante $c_1^{(\lambda)}$ als Funktion von n und λ darzustellen, haben wir nur noch die symmetrischen Funktionen C_k zu berechnen.

[16] Die folgenden Entwickelungen beruhen auf Baltzer, Determinanten (fünfte Aufl.) § 10.

Wir bilden dazu, wie oben schon angedeutet, die Gleichung, der die Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ genügen, d. h. die Gleichung

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta_1)} = 0.$$

Nun war $f(z) = z^n - z^{n-1} - n z^{n-2} - n^2 z^{n-3} - \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0$ und $\zeta_1 = n$.

Daraus ergiebt sich

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta_1)} \cdot z^{n-1} \cdot (n-1) z^{n-2} + n(n-2) z^{n-3} \cdot n^2 (n-3) z^{n-4} + \cdot \quad n^{n-2} = 0.$$

Setzen wir rechts $z = \zeta_1 = n$, so erhalten wir

$$f'(\zeta_1) = \sum_{k=0}^{n-1} n^{k-1} (n-k) n^{n-1-k} = n^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)$$

$$\text{oder } f'(\zeta_1) = \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

Ferner wird $C_k = n^{k-1}(n-k)$,

also $C_{n-\lambda} = \lambda n^{n-\lambda-1}$

und demnach schliesslich $c_1^{(\lambda)} = \dfrac{2\lambda}{n^{n+1}(n+1)}$

Daraus erhalten wir denn endlich unter Berücksichtigung des auf Seite 19 gefundenen Ausdruckes für den Grenzwert des Exponenten das gesuchte Resultat, das wir so zusammenfassen:

Wird a_x durch den Algorithmus

$$a_x = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot a_{x-3} \cdot \cdot \cdot a_{x-n}}$$

bestimmt, indem man von n reellen positiven Grössen $a_1\ a_2\ a_3 \cdot \cdot \cdot a_n$ ausgeht, dann ist

$$\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$$

Oder in Worten:

Durch den Prozess der Bildung einer Kette n *ter Wurzeln wird die* $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ *te Wurzel angenähert.*

Man erkennt sofort in diesem allgemeinen Resultat das besondere für den Fall zweier Grössen, wo ja, wie wir oben gefunden haben, die $\dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$ te Wurzel angenähert wird. Ferner stimmt natürlich der auf Seite 14 gefundene Wert der Constanten überein mit dem Wert, der sich aus der allgemeinen Formel

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{2\lambda}{n^{n+1}(n+1)}$$

für $n = 2$ ergiebt.

In der That wird $c_1^{(1)} = \dfrac{1}{12}$ $\quad c_1^{(2)} = \dfrac{1}{6}$

§ 7.

Die Beziehung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

Zwei neue Ableitungen des allgemeinen Resultates.

Wenn man zum Ausgangspunkt der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit zurückkehrt, der Logarithmenberechnung und der hierbei benutzten Parallelität in der Bildung des arithmetischen Mittels und des geometrischen, so liegt es nahe, die Grenzwerte beider zu vergleichen. Wir stellen zu dem Zweck die Grössen a_x dar als Potenzen einer positiv reellen Basis b und bezeichnen die zugehörigen Logarithmen mit β_x. Es ist also $a_1 = b^{\beta_1}$ $a_2 = b^{\beta_2}$ · · · $a_n = b^{\beta_n}$. Weiter wird dann

$$a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu}}_{\nu=1 \cdots n} = b^{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \beta_{x-\nu}}$$

Also

$$\lim_{x=\infty} a_x = b^{\lim_{x=\infty} \beta_x}$$

Der Grenzwert des arithmetischen Mittels ist aber, wie wir auf Seite 12 gefunden haben:

$$\lim_{x=\infty} \beta_x = \frac{2 \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \beta_\lambda}{n(n+1)}$$

Setzen wir diesen Wert ein, so folgt:

$$\lim_{x=\infty} a_x = b^{\frac{2\beta_1}{n(n+1)}} \; b^{\frac{2 \cdot 2 \cdot \beta_2}{n(n+1)}} \; b^{\frac{2 \cdot 3 \cdot \beta_3}{n(n+1)}} \cdot \cdot \cdot b^{\frac{2 \cdot n \cdot \beta_n}{n(n+1)}}$$

Daraus ergiebt sich aber unser Resultat

$$\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$$

Neben dieser einfachen Ableitung des geometrischen Mittels aus dem arithmetischen dürfte die von dem arithmetischen Mittel unabhängige Behandlung allein schon dadurch berechtigt sein, dass sie auf die Verwandtschaft mit dem Delischen Problem führte.

Auf die im Falle $n = 2$ bei beiden Mitteln entsprechende Annäherung an die betreffenden Grenzwerte von oben und unten braucht nur hingewiesen zu werden.

Nachdem nun die Existenz eines Grenzwertes feststeht, soll eine dritte Ableitung des allgemeinen Resultates hier noch Platz finden, die der Verfasser für den besonderen Fall $n = 2$ seinem Amtsgenossen Herrn Dr. Maey verdankt.

Wir geben sie gleich allgemein.

Es ist a_x definiert durch

$$a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu}} \qquad (\nu = 1, 2 \cdot \cdot n).$$

Wir bilden nun zunächst für endliche x

$$\Pi a_x = a_x \, a_{x-1} \, a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_3$$

und erhalten

$$\prod a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu} \; \Pi a_{x-\nu-1} \cdot \cdot \cdot a_n \, a_1}$$

Die entsprechenden Faktoren auf beiden Seiten heben sich weg, und es bleibt:

$$a_x \, a_{x-1} \, a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1} = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2}^2 \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1}^{n-1} \, a_n^n \, a_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot a_1}$$

Wird beiderseitig mit n potenziert, so folgt:

$$a_x^n \, a_{x-1}^{n-1} \, a_{x-2}^{n-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1} = a_n^n \, a_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot a_2^2 \, a_1.$$

Nun wird aber:

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim a_{x-1} = \cdot \cdot \cdot \lim a_{x-n+1}$$

folglich

$$\lim a_x^{\frac{n(n+1)}{2}} = a_n^n \, a_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot a_2^2 \, a_1$$

oder wieder

$$\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$$

Ein Nachteil dieser Ableitung ist schon angedeutet: Die Existenz des Grenzwertes wird ohne weiteres vorausgesetzt. Dann aber liefert sie nicht, wie die anderen Methoden im Falle $n = 2$ auch für endliche x die a_x als Funktionen von a_1 und a_2.

§ 8.

Die Mächtigkeit der möglichen Prozesse.

Es bleibt uns jetzt noch die zweite der in der Einleitung erwähnten Fragen zur Beantwortung übrig:

Kann durch den Prozess des geometrischen Mittels jede zwischen a_1 und a_2 liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden?

Der Gedankengang, der zu dieser Frage führte, ist in der Einleitung auseinandergesetzt; er braucht also hier nicht wiederholt zu werden. Dagegen bedarf der Sinn der Frage einer ausführlichen Erörterung. Es handelt sich dabei um folgendes.

Bildet man von zwei positiv reellen Grössen a_1 und a_2 das geometrische Mittel $a_3 = \sqrt{a_2 \, a_1}$ und vereinigt a_3 nicht allein mit dem unmittelbar vorhergehenden a_2 sondern auch mit a_1 zu einem geometrischen Mittel, so erhält man die zwei neuen Grössen:

$$a_4^{\,I} = \sqrt{a_3 \, a_1}\,; \qquad a_4^{\,II} = \sqrt{a_3 \, a_2}$$

Wird jetzt jede der Grössen a_4 mit irgend einer der vorhergehenden zur Bildung eines geometrischen Mittels benutzt, so ergeben sich 6 Grössen a_5. So fortfahrend, indem man also jedesmal jede der neuen Grössen mit irgend einer der vorhergehenden vereinigt, erhält man schliesslich unendlich viel Ketten. Die Glieder der Kette, deren Algorithmus $a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$ in der vorliegenden Arbeit untersucht wurde, nähern sich der ganz bestimmten zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl $\alpha = \sqrt[3]{a_1 \, a_2^2}$, und es ist $\alpha = \lim_{x=\infty} a_x$. Bildet man das geometrische Mittel immer nach links hin, benutzt also die Kette mit dem

Algorithmus $a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_1}$, so wird $\lim_{x=\infty} a_x = a_1$. Bei der entsprechenden Bildung nach rechts hin, wird $\lim_{x=\infty} a_x = a_2$.

Gebrauchen wir die Ausdrucksweise: Eine Zahl α ist einer Kette zugeordnet, wenn $\alpha = \lim_{x=\infty} a_x$ ist, so können wir also sagen:

Die Zahlen a_1, $\sqrt[3]{a_1 a_2^2}$, a_2 sind den Ketten $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_1}$, $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$, $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_2}$ zugeordnet.

Der obigen Frage kann man dementsprechend auch die Form geben:

Kann jede zwischen a_1 und a_2 liegende Grösse einer der möglichen Ketten zugeordnet werden?

Hierbei ist nun allerdings vorausgesetzt, dass für jede Kette $\lim a_x$ existiert. Da wir aber weiter unten sehen werden, dass die Existenz oder Nichtexistenz eines limes für die Beantwortung der Frage unwesentlich ist, so können wir die Voraussetzung zunächst formal beibehalten ohne nähere Existenzuntersuchung. Die ganze Frage hat natürlich nur rein theoretisches Interesse; vom praktischen Standpunkt aus, das heisst vom Standpunkte des Logarithmenberechners kann durch das geometrische Mittel ***jede*** zwischen a_1 und a_2 liegende Zahl ***angenähert*** werden, wie in dem aus Euler entnommenen Beispiel der Einleitung die Zahl 5 mit $a_1 = 1 \quad a_2 = 10$. Ebenso könnte auch e oder π ***angenähert*** werden. Daraus folgt aber durchaus nicht, dass unter den möglichen Ketten es eine giebt, für die $\lim a_x = e$ oder π.

Die Beantwortung der Frage ergiebt sich nun mittels der einfachsten Begriffe der G. Cantorschen Mengenlehre.[17] Wir haben nur zu untersuchen, welche Mächtigkeit die Menge der möglichen Ketten hat.

Zu dem Zwecke wollen wir folgende symbolische Bezeichnung gebrauchen. Das n te Glied werde allgemein durch die arabische Ziffer angedeutet, ein oberer Index I oder II weise auf die Abstammung von a_1 oder a_2 hin, so dass also

$$4^{\mathrm{I}} = \sqrt{a_3 \cdot a_1} = \sqrt{3 \cdot a_1}; \qquad 4^{\mathrm{II}} = \sqrt{3 \cdot a_2}$$

Des weiteren soll ein unterer Index erkennen lassen, mit welchem der vorhergehenden Glieder das n te verbunden wurde; es bedeutet demnach:

$$5^{\mathrm{I}}_1 = \sqrt{4^{\mathrm{I}} \cdot 1} \qquad 5^{\mathrm{II}}_3 = \sqrt{4^{\mathrm{II}} \cdot 3}$$

Schliesslich sollen zu dem Index I und II hinzutretende arabische Ziffern zeigen, welches n te Glied genommen wurde. Ihre Bedeutung wird klarer aus den symbolischen Gleichungen hervortreten

$$6^{\mathrm{I},1}_1 = \sqrt{5^{\mathrm{I}}_1 \cdot 1}; \qquad 6^{\mathrm{I},3}_{4^{\mathrm{II}}} = \sqrt{5^{\mathrm{I}}_3 \cdot 4^{\mathrm{II}}}; \qquad 6^{\mathrm{II},2}_{4^{\mathrm{I}}} = \sqrt{5^{\mathrm{II}}_2 \cdot 4^{\mathrm{I}}}$$

[17] Die Begriffe der Mengenlehre finden sich ausser in den Cantorschen Arbeiten in der neuesten Zeit dargestellt in der Encyclopädie der math. Wissenschaften I, A 5 und sehr ausführlich im Charakter eines Lehrbuches im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 8. Beide Darstellungen sind von Schoenflies verfasst. Es soll hier auch erwähnt werden, dass der so wichtige Begriff der Mächtigkeit auch in einem der besten elementaren Lehrbücher erscheint, in den »Elementen der Arithmetik und Algebra« von Friedrich Meyer. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Die entstehenden Grössen lassen sich nun folgendermaassen anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 3 & & & & & & \\
 & & & & & 4^{\mathrm{I}} & & & 4^{\mathrm{II}} & & & & \\
 & & & & 5_1^{\mathrm{I}} & 5_2^{\mathrm{I}} & 5_3^{\mathrm{I}} & & 5_1^{\mathrm{II}} & 5_2^{\mathrm{II}} & 5_3^{\mathrm{II}} & & \\
 & & 6_1^{\mathrm{I}_1} & 6_2^{\mathrm{I}_1} & 6_3^{\mathrm{I}_1} & 6_4^{\mathrm{I}_1} & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_1} & & 6_1^{\mathrm{I}_2} \cdots & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_2} \cdots & 6_1^{\mathrm{I}_3} \cdots & ; & 6_1^{\mathrm{II}_1} \cdots 6_1^{\mathrm{II}_2} \cdots 6_1^{\mathrm{II}_3} \cdots \\
7_1^{\mathrm{I}_{11}} \cdots & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & 7_1^{\mathrm{II}_{11}} \cdots \\
 & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & &
\end{array}
$$

Diese Anordnung lässt aber sofort erkennen, dass wir schliesslich in den Horizontalreihen eine unendliche Menge unendlicher Mengen erhalten. Die Menge der Mengen ist aber offenbar abzählbar und ebenso ist jede Teilmenge abzählbar. Also ist auch nach einem bekannten Satze der Mengenlehre die Menge der Grössen in der Horizontalreihe selbst abzählbar oder von der ersten Mächtigkeit.

Das Continuum zwischen a_1 und a_2 hat nun aber bekanntlich eine höhere Mächtigkeit: Also ist es unmöglich, jeder Zahl zwischen a_1 und a_2 eine der Ketten zuzuordnen.[18]

Sollten nun unter den Ketten solche sein, für die $\lim a_x$ nicht existiert, so können wir diese ausscheiden. Die übrig bleibende Menge ist endweder endlich oder unendlich von der ersten Mächtigkeit, keinesfalls von höherer.

Der Satz bleibt also bestehen und wir können noch einmal zusammenfassend die zweite Frage, wie folgt, beantworten:

> ***Es kann durch den Prozess des geometrischen Mittels nicht jede zwischen*** a_1 ***und*** a_2 ***liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden.***

Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall des geometrischen Mittels aus n Grössen bietet keine Schwierigkeit.

Schluss.

Die vorliegende Arbeit scheint dem Verfasser nach zwei Richtungen hin Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen zu bieten. Einmal führt die im Paragraphen 5 vorkommende Bestimmung durch eine Differenzengleichung ***erster*** Ordnung, während im vorhergehenden Paragraphen eine solche ***zweiter*** Ordnung auftritt, auf den Begriff der Reducibilität der Differenzengleichungen.

Dann aber wird es von Interesse sein den Zusammenhang zu finden zwischen der hier gefundenen Annäherung einer kubischen Irrationalität durch quadratische mit den neueren Untersuchungen von Meyer[19] und Minkowski[20] besonders über die Annäherung kubischer und allgemein algebraischer Irrationalitäten durch kettenbruchartige Algorithmen.

[18] Es ist nicht nötig ein-eindeutig hinzuzusetzen bei unserer Definition des Zuordnens.

[19] Königsberg, phys.-ökon. Gesellschaft, Jahrg. 38, S. 57.

[20] Göttinger Nachr. 1899, S. 64. Vergl. auch Encyclopädie I C 3, S. 688.

VITA.

Natus sum Guilelmus Lorey die XXIII mens. Jan. MDCCCLXXIII Francofurti, in urbe ad Moenum sita, patre Carolo, medicinae doctore, quem mihi praematura morte abreptum esse doleo, matre Luisa e gente Röder. Fidem profiteor evangelicam. Primis litterarum elementis imbutus sum gymnasii realis, quod vocatur »Musterschule«, gradibus ab nono ad quintum. Deinde transmigravi ad gymnasium civile eiusdem urbis, quod tum sub Reinhardo gymnasiarcha solum florebat. Eius gradus a quarto ad primum percurri. Mense septembri a. LXXXXI maturitatis testimonium adeptus Halis Saxonum, Monaci, Gottingae studiis praecipue mathematicis physicis chemicis incubui. Exercitationibus interfui seminarii mathematici Halensis Monacensis Gottingensis; physicis in academia technica Monacensi et Gottingae; philosophicis Halis Monacique. Seminarii geographici Halensis sodalis quoque per sex menses fui. Die XXV—XXVI mens. Oct. a. LXXXXV examen pro facultate docendi Gottingae superavi. Deinde per bis senos menses et assecurationis scientiam et ampliora studia mathematica peregi. Docuerunt me viri doctissimi:

Halis: Burdach, G. Cantor, Dorn, B. Erdmann, Grenacher, Haym, Kirchhoff, v. Lisst, Stäckel, Volhard, Wangerin, Wiener.

Monaci: Boltzmann, Pringsheim, Sohnke †, Stumpf.

Gottingae: Bohlmann, Cohn, Drude, Ehrenberg, Hilbert, F. Klein, v. Koenen, Lexis, Liebisch, G. E. Müller, Nernst, Riecke, Schoenflies, Schur, Voigt, Wallach, H. Weber.

Quibus omnibus optime de me meritis gratias ago quam maximas.

A primo die mens. Oct. a. LXXXXVI candidatus seminarii Vacui in urbe Frisiae orientalis, postero anno probandus fui ad »Pontem ranarum«, quae urbs minima lingua vernacula »Quakenbrück« vocatur. Ibidem per sex menses magister scientificus auxiliaris fui; ad idem munus in eandem Frisiae urbem revocatus anno post in urbe Remigii, quae vocatur Remscheid, gymnasii realis, quod nunc reformabitur, magister superioris gradus electus sum.

Druck von Hermann Krumm, Remscheid.